

## CAPÍTULO 5

### DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

**5-1 Introducción.** La rama de las matemáticas conocida con el nombre de Cálculo Diferencial gira en torno de un proceso especial de límite, la *diferenciación*, que será considerado con detalle en este capítulo. Dos tipos distintos de problemas — el problema físico de calcular la velocidad instantánea de una partícula móvil, y el problema geométrico de encontrar la tangente a una línea en uno de sus puntos — conducen de manera natural a la misma idea básica que contiene la noción de derivada. Aquí, no nos interesaremos demasiado por las aplicaciones de la diferenciación a la mecánica o a la geometría, y nos ceñiremos al estudio de las propiedades matemáticas generales de la derivada. Este capítulo trata de la diferenciación de *funciones reales* definidas en  $E_1$  y el Capítulo 6 tratará de las generalizaciones a  $E_n$ .

**5-2 Definición de derivada.** Si  $f$  es una función definida en un intervalo abierto  $(a, b)$ , para dos puntos distintos  $x$  y  $x_0$  de  $(a, b)$  podemos formar el *cociente de diferencias*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Conservemos fijo  $x_0$  y estudiemos el comportamiento de tal cociente al tomar  $x$  valores tan próximos a  $x_0$  como queramos.

**5-1 DEFINICIÓN.** Sea  $f$  definida en un intervalo abierto  $(a, b)$ , y supongamos que  $x_0 \in (a, b)$ . Se dice que  $f$  tiene derivada en  $x_0$  siempre que existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Este límite, que se escribe  $f'(x_0)$ , se llama la *derivada de  $f$  en  $x_0$* .

Podemos pensar que el límite citado define, a partir de una función dada  $f$ , una nueva función  $f'$ , cuyo dominio está constituido por los puntos de  $(a, b)$  en los que  $f$  tiene derivada. La función  $f'$  se llama la *derivada primera* de  $f$ . Análogamente la derivada  $n$ -ésima de  $f$ , que se representa por  $f^{(n)}$ , se define como la derivada primera de  $f^{(n-1)}$ ,  $n = 2, 3, \dots$  (Según nuestra definición, no tiene sentido considerar  $f^{(n)}$  a no ser que  $f^{(n-1)}$  esté definida en un intervalo abierto.) Otras notaciones con las que el lector puede estar familiarizado son

$$f'(x) = Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} \quad [\text{donde } y = f(x)],$$

u otras similares. La propia función  $f$  algunas veces se escribe  $f^{(0)}$ .

5-2 TEOREMA. Si  $f$  tiene derivada en un punto  $x_0$  de  $(a, b)$ , es continua en  $x_0$ .

*Demostración.* Si  $x \in (a, b)$ ,  $x \neq x_0$ , podemos escribir

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0).$$

Aplicando el Teorema 4-8 II), encontramos  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Esto prueba el aserto.

El próximo teorema nos proporciona una información más precisa sobre el comportamiento de  $f$  en las proximidades de un punto en el que la derivada existe.

5-3 TEOREMA. Si  $f$  tiene derivada en un punto interior  $x_0$  de  $(a, b)$ , existe un entorno  $N(x_0)$  y un número positivo  $M$  tal que  $x \in N'(x_0)$  implica  $|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|$ .

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , hay un entorno  $N(x_0) \subset (a, b)$  tal que

$$x \in N'(x_0) \text{ implica } \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Si tomamos el entorno correspondiente a  $\varepsilon = 1$ , podemos escribir

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < |f'(x_0)| + 1$$

siempre que  $x \in N'(x_0)$ . La conclusión del teorema se deduce tomando  $M = 1 + |f'(x_0)|$ .

De las funciones para las que la conclusión del Teorema 5-3 es cierta, se dice que satisfacen la *condición de Lipschitz* en  $x_0$ . Geométricamente, esto significa que la gráfica debe quedar entre las dos rectas  $y - f(x_0) = M(x - x_0)$  e  $y - f(x_0) = -M(x - x_0)$  siempre que  $x \in N'(x_0)$ . (Ver Fig. 5-1.) El número  $M$ , naturalmente, depende de  $x_0$ . Las funciones que satisfacen la condición de Lipschitz en  $x_0$  son automáticamente continuas en  $x_0$ , pero la recíproca no es cierta. (Ver Ejercicio 5-1.)

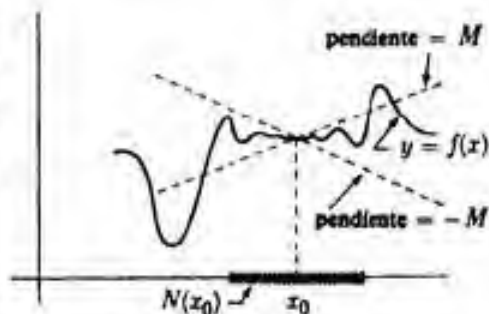


Fig. 5-1. Condición de Lipschitz en  $x_0$ .

**5-3 Algebra de derivadas.** El lector no tendrá dificultad en deducir el teorema siguiente utilizando las demostraciones corrientes del cálculo elemental.

**5-4 TEOREMA.** Si  $f$  y  $g$  están definidas en  $(a, b)$ , en todos los puntos en los que  $f$  y  $g$  admiten derivadas, las funciones  $f + g$ ,  $f - g$ , y  $f \cdot g$  también poseen derivadas. Esto también es cierto para la función  $f/g$  en los puntos  $x$  donde  $g(x) \neq 0$ . Estas derivadas vienen dadas por las fórmulas:

$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g,$$

$$(f/g)' = [g \cdot f' - f \cdot g'] / g^2 \quad (\text{en los puntos en los que } g(x) \neq 0).$$

A partir de la definición vemos inmediatamente que si  $f(x)$  es constante para todo valor de  $x$ ,  $f'(x)$  es siempre 0. Asimismo, si  $f(x) = x$  es  $f'(x) = 1$  para todo  $x$ . La aplicación reiterada del Teorema 5-4 nos dice que si  $f(x) = x^n$  ( $n$  entero positivo), la derivada  $f'(x) = n x^{n-1}$  para todo  $x$ . Del mismo teorema deducimos que todo polinomio tiene derivada en todo  $E_1$ , y toda función racional admite derivada donde esté definida.

**5-4 La regla de la cadena.** Un resultado bastante más profundo concerniente a las derivadas es la llamada *regla de la cadena* para la diferenciación de una función compuesta.

**5-5 TEOREMA (Regla de la cadena).** Sean  $f$  continua en un intervalo cerrado  $S$  y  $f(S)$  la imagen de  $S$  originada por  $f$ . Sea  $g$  otra función definida en  $f(S)$  y consideremos la función compuesta  $gf$  definida para cada valor  $x$  de  $S$  mediante  $gf(x) = g[f(x)]$ . Supongamos que  $x_0$  es un punto interior de  $S$  tal que  $y_0 = f(x_0)$  es un punto interior de  $f(S)$ . Admitamos, además que existan las dos derivadas  $f'(x_0)$  y  $g'(y_0)$ . Entonces  $gf$  posee derivada en  $x_0$  y su valor es  $f'(x_0)g'(y_0)$ . Esto es,

$$(gf)'(x_0) = g'[f(x_0)] f'(x_0).$$

*Demostración.* Tenemos que considerar el límite del cociente

$$\frac{gf(x) - gf(x_0)}{x - x_0}$$

cuando  $x$  tiende a  $x_0$ . Como primer intento hacia la demostración, parece natural escribir

$$\frac{gf(x) - gf(x_0)}{x - x_0} = \frac{g[f(x)] - g[f(x_0)]}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si  $x \rightarrow x_0$ , el segundo factor del segundo miembro tiene como límite  $f'(x_0)$  y el límite del primer factor debería ser  $g'[f(x_0)]$ . Sin embargo, esto no es legítimo pues el denominador  $f(x) - f(x_0)$  del primer factor podría ser cero en todo entorno de  $x_0$ , y, por consiguiente, el primer factor sería indeterminado en tales puntos  $x$ . Por tanto, es necesario un razonamiento más preciso.

Escribamos  $y_0 = f(x_0)$  y definamos una nueva función  $h$  como sigue:

$$h(y) = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0) \quad \text{si } y \neq y_0, y \in f(S), \quad h(y_0) = 0.$$

Entonces tenemos  $\lim_{y \rightarrow y_0} h(y) = 0$  a causa de la supuesta existencia de  $g'(y_0)$ . Luego  $h$  es continua en  $y_0$ . Ahora bien,  $h$  está definida en todo punto de  $f(S)$  y, por tanto, tiene sentido considerar la función compuesta  $hf$ . Puesto que  $f$  es continua en  $x_0$  y  $h$  lo es también en  $y_0 = f(x_0)$ , el teorema de la continuidad de las funciones compuestas (Teorema 4-11) nos dice que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} hf(x) = h[f(x_0)] = h(y_0) = 0$$

Tomando  $y = f(x)$  en la definición de  $h$ , podemos escribir

$$hf(x) = \frac{g[f(x)] - g(y_0)}{f(x) - y_0} - g'(y_0), \quad \text{si } f(x) \neq y_0,$$

o

$$g(f(x)) - g(y_0) = [hf(x) + g'(y_0)][f(x) - y_0],$$

y esta igualdad subsiste incluso si  $f(x) = y_0$ . Ahora bien, conservemos  $x \neq x_0$  y dividamos ambos miembros por  $x - x_0$  para obtener

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = [hf(x) + g'(y_0)] \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Estamos ahora en condiciones de considerar el límite cuando  $x \rightarrow x_0$ . El segundo factor del segundo miembro tiene como límite  $f'(x_0)$  y antes hemos visto que  $\lim_{x \rightarrow x_0} hf(x) = 0$ . Luego el primer miembro tiene por límite  $g'(y_0) f'(x_0)$ , como deseábamos demostrar.

**5-5 Derivadas laterales y derivadas infinitas.** Hasta ahora, el decir que  $f$  tenía derivada en  $x_0$  ha significado que  $x_0$  era *interior* a un intervalo en el que  $f$  estaba definida y que el límite  $f'(x_0)$  era *finito*. Es conveniente extender el alcance de nuestras ideas con vistas a la discusión de las derivadas en los extremos de los intervalos. También es deseable introducir derivadas *infinitas*, de manera que la interpretación geométrica de derivada como la pendiente de la recta tangente sea válida aun en el caso en el que la tangente sea vertical. Debido a que en tal caso no podemos probar que  $f$  es continua en  $x_0$ , exigimos explícitamente que lo sea.

5-6 DEFINICIÓN. Sea  $f$  definida en un intervalo cerrado  $S$  y supongamos que  $f$  es continua en el punto  $x_0$  de  $S$ . Se dice que  $f$  tiene derivada a la derecha de  $x_0$  si el límite a la derecha

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe y es finito, o si es  $+\infty$  o  $-\infty$ . Este límite se expresa con la notación  $f'_+(x_0)$ . De forma análoga se define la derivada a la izquierda y se representa por  $f'_-(x_0)$ . Además, si  $x_0$  es un punto interior de  $S$ , decimos que  $f$  tiene la derivada  $f'(x_0) = +\infty$  si las dos derivadas a la izquierda y a la derecha de  $x_0$  son  $+\infty$ . (La derivada  $f'(x_0) = -\infty$  se define análogamente.)

Es evidente que  $f$  tiene derivada en  $x_0$  si, y únicamente si,  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$  en cuyo caso  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$ .

La Figura 5-2 ilustra alguno de estos conceptos. En el punto  $x_1$  tenemos  $f'_+(x_1) = -\infty$ . En  $x_2$  la derivada a la izquierda es 0 y a la derecha es  $-1$ . También,  $f'_-(x_3) = -\infty$ ,  $f'_-(x_4) = -1$ ,  $f'_+(x_4) = +1$ ,  $f'(x_6) = +\infty$ , y  $f'_-(x_7) = 2$ . No existe derivada (ni a un lado ni al otro) en  $x_5$ , ya que  $f$  no es continua allí.

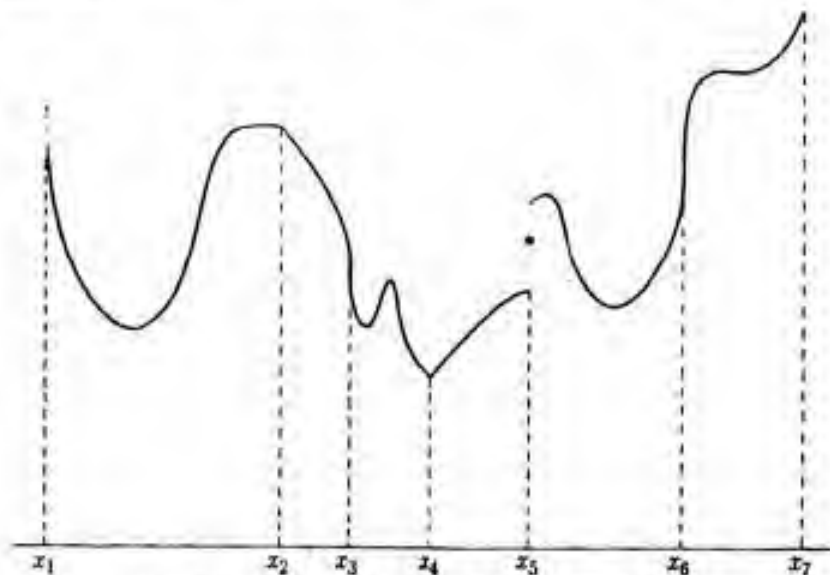


Fig. 5-2. Derivadas laterales y derivadas infinitas.

### 5-6 Funciones con derivada no nula.

5-7 TEOREMA. Sea  $f$  definida en un intervalo abierto  $(a, b)$  y supongamos que en algún punto  $x_0$  de  $(a, b)$  tenemos  $f'(x_0) > 0$  o  $f'(x_0) = +\infty$ . Existe entonces un entorno  $N(x_0) \subset (a, b)$  tal que para cada  $x$  de  $N(x_0)$  se verifica  $f(x) > f(x_0)$  si  $x > x_0$ , y  $f(x) < f(x_0)$  si  $x < x_0$ .



*Demostración.* Supongamos que  $f'(x_0)$  sea finita y positiva. Para todo  $\varepsilon > 0$  existe un entorno  $N(x_0) \subset (a, b)$  tal que

$$x \in N'(x_0) \text{ implica } \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Tomemos el entorno correspondiente a  $\varepsilon = \frac{1}{2}f'(x_0)$ . Entonces si  $x \in N'(x_0)$ , tenemos

$$-\frac{1}{2}f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) < \frac{1}{2}f'(x_0),$$

o

$$0 < \frac{1}{2}f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{3}{2}f'(x_0).$$

Luego en este entorno el cociente  $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$  es positivo. Pero esto implica que  $f(x) - f(x_0)$  tiene el mismo signo que  $x - x_0$ .

Si  $f'(x_0) = +\infty$ , habrá un entorno  $N(x_0)$  tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 1, \quad \text{siempre que } x \in N'(x_0).$$

En este entorno el cociente es también positivo y la conclusión se deduce como antes.

Un resultado análogo al del Teorema 5-7 es legítimo, naturalmente, si  $f'(x_0) < 0$  ó  $f'(x_0) = -\infty$  en algún punto interior de  $(a, b)$ .

**5-7 Funciones con derivada nula.** Podemos utilizar el Teorema 5-7 para obtener el siguiente resultado importante que pone de manifiesto una conexión entre las derivadas y los máximos y mínimos relativos.

**5-8 TEOREMA.** Sea  $f$  definida en un intervalo abierto  $(a, b)$  y supongamos que,  $f$  posea un máximo o un mínimo relativo en un punto interior  $x_0$  de  $(a, b)$ . Si  $f$  tiene derivada en  $x_0$ , entonces  $f'(x_0)$  debe ser 0.

*Demostración.* Si  $f'(x_0)$  es positiva o  $+\infty$ ,  $f$  no puede tener ni máximo ni mínimo relativo en  $x_0$  a causa del Teorema 5-7. Por lo mismo,  $f'(x_0)$  no puede ser negativa o  $-\infty$ . Pero, debido a que existe derivada en  $x_0$ , la única posibilidad es  $f'(x_0) = 0$ .

El recíproco del Teorema 5-8 no es cierto. En general, el conocimiento de que  $f'(x_0) = 0$  no es suficiente para determinar si  $f$  tiene un máximo o un mínimo en  $x_0$ . Efectivamente, puede ser que no exista ni uno ni otro, como puede verificarse con el ejemplo en que  $f(x) = x^3$  y  $x_0 = 0$ . En este caso  $f'(0) = 0$  pero  $f$  es creciente en todo entorno de 0.

Además, hay que hacer notar que  $f$  puede tener un máximo o un mínimo relativos en  $x_0$  sin que  $f'(x_0)$  se anule. Por ejemplo, la función  $f(x) = |x|$  tiene un mínimo en  $x = 0$  pero, naturalmente, no posee derivada en  $x = 0$ . El teorema antes demostrado (5-8) supone que  $f$  debe tener derivada (finita o infinita) en  $x_0$ . Asimismo  $x_0$  debe ser un punto interior de  $(a, b)$ . En el ejemplo  $f(x) = x$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $f$  alcanza su máximo y su mínimo en los extremos pero  $f'(x)$  no se anula nunca en  $[a, b]$ .

**5-8 Teorema de Rolle.** Pensando en la representación geométrica es evidente que una curva suficientemente « regular » que corta al eje  $ox$  en los dos extremos de un intervalo  $[a, b]$  debe poseer un « punto de viraje » en algún punto comprendido entre  $a$  y  $b$ . Un teorema de gran importancia en cálculo, conocido como el *teorema de Rolle*, precisa este hecho. Está contenido en la parte I) del siguiente teorema.

**5-9 TEOREMA.** Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto  $(a, b)$  y admitamos que tiene derivada (finita o infinita) en cada punto interior. Supongamos también que los dos límites  $f(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  y  $f(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$  existen (y son finitos). Entonces tenemos:

I) Si  $f(a+) = f(b-)$ , existe por lo menos un punto interior  $x_0$  de  $(a, b)$  en el que  $f'(x_0) = 0$ .

II) Si  $f'(x) \neq 0$  en todo punto  $x$  de  $(a, b)$ ,  $f$  es monótona en  $(a, b)$ . Con más precisión,  $f$  es estrictamente creciente si  $f(a+) < f(b-)$  y estrictamente decreciente si  $f(a+) > f(b-)$ .

*Demostración.* La hipótesis implica que  $f$  es continua en el intervalo  $(a, b)$ . Definamos una nueva función  $g$  así:

$$g(x) = f(x) \quad \text{si } x \in (a, b), \quad g(a) = f(a+), \quad g(b) = f(b-).$$

De este modo  $g$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y por tanto alcanza su máximo  $M$  y su mínimo  $m$  en algún punto de  $[a, b]$ . Si  $f'(x)$  no se anula en  $(a, b)$ , el Teorema 5-8 nos dice que los valores extremos de  $g$  no pueden ser alcanzados en puntos interiores.

Para demostrar I), supongamos que  $f(a+) = f(b-)$ . Si  $f'(x) \neq 0$  para todo punto  $x$  en  $(a, b)$ , se debe verificar  $m = g(a) = g(b) = M$  (según las observaciones precedentes). Esto implica que  $f$  es constante en  $(a, b)$ . Por consiguiente, la no anulación de  $f'$  en  $(a, b)$  es incompatible con la igualdad  $f(a+) = f(b-)$ . Esto demuestra I).

Para probar II) supongamos que  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$  y que  $f(a+) < f(b-)$ . Entonces  $m = g(a) < g(b) = M$ , y, por tanto,  $g(a) < g(x) < g(b)$  para todo  $x$  de  $(a, b)$ . Tomando un valor fijo de  $x$ ,  $x = x_1$ ,  $a < x_1 < b$ , y aplicando el mismo razonamiento al intervalo cerrado  $[x_1, b]$ , encontramos que

$$g(x_1) < g(x) < g(b) \quad \text{si } x_1 < x < b$$

Pero esto indica que  $f(x_1) < f(x)$  siempre que  $a < x_1 < x < b$ . Luego  $f$  es estrictamente creciente en  $(a, b)$ . (Si  $f(a+) > f(b-)$ , el razonamiento es el mismo.) Esto demuestra II).

**5-9 El Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.** Uno de los instrumentos más útiles del cálculo diferencial es el Teorema del Valor Medio.

**5-10 TEOREMA (Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial).** Sea  $f$  una función definida en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y supongamos que  $f$  posee derivada (finita o infinita) en cada punto interior. Supongamos además que los límites  $f(a+)$  y  $f(b-)$  existen y que satisfacen la condición

$$f(a) - f(a+) = f(b) - f(b-).$$

Existe entonces por lo menos un punto interior  $x_0$  de  $(a, b)$  tal que

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

NOTA. La condición  $f(a) - f(a+) = f(b) - f(b-)$  significa que el salto a la derecha de  $a$  y el salto a la izquierda de  $b$  deben tener la misma magnitud pero signos opuestos. En particular dicha condición se satisface si  $f$  es continua en ambos extremos.

Geométricamente, el Teorema 5-10 establece que en una curva suficientemente «regular» que une dos puntos  $A$  y  $B$  existe una tangente que tiene la misma pendiente que la cuerda  $AB$ .

El Teorema del Valor Medio se obtendrá como corolario del siguiente teorema más general.

**5-11 TEOREMA (Teorema generalizado del Valor Medio).** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones definidas en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y supongamos que cada una de ellas tenga derivada, finita o infinita, en todo punto interior. En los extremos, supongamos que existen los límites  $f(a+)$ ,  $f(b-)$ ,  $g(a+)$  y  $g(b-)$  y que satisfacen la relación

$$I) [f(a+) - f(b-)] [g(a) - g(b)] = [f(a) - f(b)] [g(a+) - g(b-)].$$

Existe por lo menos un punto interior  $x_0$  de  $(a, b)$  tal que

$$II) f'(x_0)[g(b) - g(a)] = g'(x_0)[f(b) - f(a)].$$

NOTA. La hipótesis I) queda automáticamente si  $f$  y  $g$  son ambas continuas en los extremos de  $[a, b]$ . Si  $g(x) = x$  resulta el Teorema 5-10.

*Demostración.* Si  $x \in [a, b]$ , sean  $F(x) = f(x)[g(b) - g(a)]$  y  $G(x) = g(x)[f(b) - f(a)]$ . Si existe en  $(a, b)$  un punto  $c$  en el que  $F'(c)$  y  $G'(c)$  son ambas  $+\infty$  o ambas  $-\infty$ , la igualdad II) es cierta para  $x_0 = c$ , tomando ambos miembros el valor  $+\infty$  o el  $-\infty$ . Supongamos que para ningún  $x$  de  $(a, b)$ ,  $F'(x)$  y  $G'(x)$  tomen ambas el valor  $+\infty$  o el  $-\infty$ , y consideremos  $h(x) = F(x) - G(x)$ . Entonces  $h$  tiene derivada (finita o infinita) en cada  $x$  de  $(a, b)$  y



$h(a+) = h(b-)$ . En virtud del Teorema de Rolle, debe ser  $h'(x_0) = 0$  para un cierto  $x_0$  interior a  $(a, b)$ , y esto demuestra II).

NOTA. El lector debería interpretar geométricamente el Teorema 5-11 refiriéndolo a la curva plana representada por las ecuaciones paramétricas  $x = g(t)$ ,  $y = f(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ .

Hemos visto ya en el Teorema 5-9 que  $f$  debe ser monótona en  $(a, b)$  si  $f'$  no es nunca nula. El mismo resultado puede obtenerse como consecuencia inmediata del Teorema del Valor Medio.

**5-12 TEOREMA.** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y posee derivada que toma únicamente valores positivos (finitos o infinitos) en el interior,  $f$  es entonces estrictamente creciente en  $[a, b]$ . Si  $f'$  toma únicamente valores negativos (finitos o infinitos) en  $(a, b)$ ,  $f$  es estrictamente decreciente en  $[a, b]$ . Si  $f'(x) = 0$  en todo punto  $x$  de  $(a, b)$ ,  $f$  es constante en todo  $[a, b]$ .

*Demostración.* Si aplicamos el Teorema del Valor Medio a un intervalo arbitrario  $[x_1, x_2]$  de  $[a, b]$ , encontramos

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1), \quad \text{donde } x_0 \in (x_1, x_2).$$

Todas las proposiciones del teorema se deducen inmediatamente de esta igualdad.

Aplicando el Teorema 5-12 a la diferencia  $f - g$ , vemos que cuando dos funciones  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$  y sus derivadas son finitas e iguales en cada punto interior, las dos funciones  $f$  y  $g$  difieren en una constante en todo el intervalo  $[a, b]$ .

**5-10 Teorema del valor intermedio para las derivadas.** En el Teorema 4-22 del capítulo anterior hemos probado que una función  $f$  continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  toma todos los valores comprendidos entre su máximo y su mínimo en dicho intervalo. En particular,  $f$  alcanza todos los valores comprendidos entre  $f(a)$  y  $f(b)$ . Un resultado parecido demostraremos ahora para las funciones derivadas.

**5-13 TEOREMA.** (Teorema del valor intermedio para las derivadas). Supongamos que  $f$  está definida en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y que tiene derivada (finita o infinita) en cada punto interior. Supongamos también que  $f$  tiene derivadas laterales finitas en los extremos  $f'_+(a)$  y  $f'_-(b)$  y que  $f'_+(a) \neq f'_-(b)$ . En tal caso, si  $c$  es un número real comprendido entre  $f'_+(a)$  y  $f'_-(b)$ , existe por lo menos un punto interior  $x$  tal que  $f'(x) = c$ .

*Demostración.* Definamos una nueva función  $g$  como sigue:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{si } x \neq a, \quad g(a) = f'_+(a).$$

Esta función  $g$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Según el teorema del valor intermedio para las funciones continuas,  $g$  toma todos los valores comprendidos entre  $f'_+(a)$  y  $[f(b) - f(a)]/(b - a)$  en el interior de  $(a, b)$ . En virtud del Teorema del Valor Medio, tenemos  $g(x) = f'(x_0)$  para algún  $x_0$  en  $(a, x)$  siempre que  $x \in (a, b)$ . Por consiguiente  $f'$  toma todos los valores comprendidos entre  $f'_+(a)$  y  $[f(b) - f(a)]/(b - a)$  en el interior de  $(a, b)$ . Un razonamiento semejante aplicado a la función  $h$ , definida por

$$h(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \quad \text{si } x \neq b, \quad h(b) = f'_-(b),$$

demuestra que  $f'$  toma todo valor comprendido entre  $[f(b) - f(a)]/(b - a)$  y  $f'_-(b)$  en el interior de  $(a, b)$ . Combinando estos resultados, vemos que  $f'$  toma todos los valores comprendidos entre  $f'_+(a)$  y  $f'_-(b)$  en el interior de  $(a, b)$ , y esto demuestra el teorema.

NOTA. El Teorema 5-13 es aun válido si una de las derivadas laterales  $f'_+(a)$ ,  $f'_-(b)$  o ambas, son infinitas. La demostración en este caso se consigue considerando la función auxiliar  $g$  definida mediante la ecuación  $g(x) = f(x) - cx$ , si  $x \in [a, b]$ . Los detalles se dejan al cuidado del lector. (Ver Ejercicio 5-22.)

**5-11 Fórmula de Taylor con resto.** El Teorema del Valor Medio ha sido ya interpretado geoméricamente, pero existe otro aspecto del teorema que también nos ayuda a comprender su significado.

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y tiene derivada en cada punto interior, dado  $x$  en  $(a, b)$ , podemos escribir

$$f(x) = f(a) + f'(x_0)(x - a), \quad \text{donde } a < x_0 < x.$$

Esta igualdad dice que la cantidad  $f'(x_0)(x - a)$  mide el error cometido cuando  $f(x)$  es aproximado por  $f(a)$ . Desgraciadamente, el Teorema del Valor Medio no nos indica cómo puede calcularse  $x_0$ ; dice simplemente que  $a < x_0 < x$ . Si  $x$  no está muy alejado de  $a$ ,  $[f(x) - f(a)]/(x - a)$  será aproximadamente  $f'(a)$ . Esto es,  $f'(x_0)$  será aproximadamente igual a  $f'(a)$ , y por consiguiente la igualdad

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

debe ser aproximadamente correcta cuando  $x - a$  es pequeño. Esto significa que  $f$  es aproximadamente una función lineal en las proximidades de  $a$ . El teorema de Taylor nos dice, con más generalidad, que  $f$  puede aproximarse mediante un polinomio de grado  $n - 1$  si  $f^{(n)}$  existe en  $(a, b)$ . La importancia de este teorema radica en el hecho de que nos proporciona una expresión útil del error cometido por esa aproximación.

**5-14 TEOREMA (Taylor).** Sea  $f$  una función que tiene derivada  $n$ -ésima finita  $f^{(n)}$  en todo el intervalo abierto  $(a, b)$  y supongamos que  $f^{(n-1)}$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Consideremos un punto  $x_0 \in [a, b]$ . Entonces, para todo  $x$  de  $[a, b]$ ,  $x \neq x_0$ , existe un punto  $x_1$  interior al intervalo que une  $x$  con  $x_0$  tal que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_0)^n.$$

El teorema de Taylor se obtendrá como consecuencia de un resultado más general que es una extensión directa del Teorema del Valor Medio generalizado.

**5-15 TEOREMA.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones que poseen derivadas  $n$ -ésimas  $f^{(n)}$  y  $g^{(n)}$  en el intervalo abierto  $(a, b)$  y las derivadas de orden  $n-1$  continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Tomemos un punto  $x_0 \in [a, b]$ . Entonces, para todo  $x$  de  $[a, b]$ ,  $x \neq x_0$ , existe un punto  $x_1$  interior al intervalo que une  $x$  con  $x_0$  tal que

$$\begin{aligned} \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right] g^{(n)}(x_1) \\ = f^{(n)}(x_1) \left[ g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right]. \end{aligned}$$

**NOTA.** En el caso especial en que  $g(x) = (x - x_0)^n$ , tenemos  $g^{(k)}(x_0) = 0$  para  $0 \leq k \leq n-1$  y  $g^{(n)}(x) = n!$ . Este teorema se reduce entonces al teorema de Taylor.

**Demostración.** Para simplificar, supongamos que  $x_0 < b$  y que  $x > x_0$ . Mantengamos fijo  $x$  y definamos dos nuevas funciones  $F$  y  $G$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(t) &= f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k, \\ G(t) &= g(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k, \end{aligned}$$

para cada  $t$  en  $[x_0, x]$ . Estas funciones  $F$  y  $G$  son continuas en el intervalo cerrado  $[x_0, x]$  y tienen derivadas finitas en el intervalo abierto  $(a, x)$ . Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 5-11 y escribir

$$F'(x_1) [G(x) - G(x_0)] = G'(x_1) [F(x) - F(x_0)], \quad \text{donde } x_1 \in (x_0, x).$$

Esta igualdad se transforma en la:

$$a) \quad F(x_1) [g(x) - G(x_0)] = G'(x_1) [f(x) - F(x_0)],$$

ya que  $G(x) = g(x)$  y  $F(x) = f(x)$ . Si, ahora, calculamos la derivada de la suma que define  $F(t)$ , teniendo en cuenta que cada término de la suma es un producto, encontramos que todos los términos se destruyan salvo uno, y nos resulta

$$F'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t).$$

Análogamente, obtenemos

$$G'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t).$$

Si ponemos  $t = x_1$  y sustituimos en a), deducimos la fórmula del teorema.

### EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios suponemos, donde sea preciso, un conocimiento de las fórmulas para la diferenciación de las funciones elementales trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

5-1. Se dice que una función  $f$  satisface una condición de Lipschitz de orden  $\alpha$  en  $x_0$  si existe un número positivo  $M$  (que puede depender de  $x_0$ ) y un entorno  $N(x_0)$  tal que

$$x \in N(x_0) \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(x_0)| < M(x - x_0)^\alpha.$$

a) Demostrar que una función que satisface una condición de Lipschitz de orden  $\alpha$  es continua en  $x_0$  si  $\alpha > 0$ , y tiene derivada en  $x_0$  si  $\alpha > 1$ .

b) Dar un ejemplo de una función que satisfaga una condición de Lipschitz de orden 1 en  $x_0$  para la cual  $f'(x_0)$  no exista.

5-2. En cada uno de los casos siguientes, determinar los intervalos en los que la función  $f$  es creciente o decreciente y encontrar los máximos y mínimos (si existen) en el conjunto en el que cada  $f$  está definida

- a)  $f(x) = x^3 + ax + b$ ,  $x \in E_1$ .
- b)  $f(x) = \log(x^2 - 9)$ ,  $|x| > 3$ .
- c)  $f(x) = x^{2/3}(x-1)^4$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
- d)  $f(x) = (\sin x)/x$  si  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$ .

5-3. Encontrar un polinomio  $f$  de menor grado posible tal que

$$f(x_1) = a_1, \quad f(x_2) = a_2, \quad f'(x_1) = b_1, \quad f'(x_2) = b_2,$$

siendo  $x_1 \neq x_2$  y  $a_1, a_2, b_1, b_2$  números reales dados.

5-4. Definimos  $f$  de la siguiente manera:

$$f(x) = e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0, \quad f(0) = 0. \text{ Demostrar que}$$

- a)  $f$  es continua para todo  $x$ .
- b)  $f^{(n)}$  es continua para todo  $x$ , y que  $f^{(n)}(0) = 0$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ).

5-5. Definimos  $f$ ,  $g$  y  $h$  así:  $f(0) = g(0) = h(0) = 0$  y, si  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \sin(1/x)$ ,  $g(x) = x \sin(1/x)$ ,  $h(x) = x^2 \sin(1/x)$ .

Mostrar que

- a)  $f'(x) = -1/x^2 \cos(1/x)$ , si  $x \neq 0$ ;  $f'(0)$  no existe.  
 b)  $g'(x) = \sin(1/x) - 1/x \cos(1/x)$ , si  $x \neq 0$ ;  $g'(0)$  no existe.  
 c)  $h'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ , si  $x \neq 0$ ;  $h'(0) = 0$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x)$  no existe

5-6. Obtener la fórmula de Leibnitz para la derivada  $n$ -ésima de un producto  $h$  de dos funciones  $f$  y  $g$ :

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \quad \text{donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

5-7. Dadas dos funciones  $f$  y  $g$  definidas y que poseen derivadas terceras finitas  $f'''(x)$  y  $g'''(x)$  para todo  $x$  en  $E_1$ . Si  $f(x)g(x) = 1$  para cualquier  $x$ , demostrar que las relaciones a), b), c) y d) son válidas en todos los puntos en los que los denominadores no se anulan:

- a)  $f'(x)/f(x) + g'(x)/g(x) = 0$ .  
 b)  $f''(x)/f'(x) - 2f'(x)/f(x) - g''(x)/g'(x) = 0$ .  
 c)  $\frac{f'''(x)}{f'(x)} - 3 \frac{f'(x)g''(x)}{f(x)g'(x)} - 3 \frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{g'''(x)}{g'(x)} = 0$ .  
 d)  $\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 = \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2$ .

NOTA. La expresión que aparece en el primer miembro de d) se llama la *derivada Schwarziana* de  $f$  en  $x$ .

e) Demostrar que  $f$  y  $g$  tienen la misma derivada Schwarziana si

$$g(x) = [af(x) + b]/[cf(x) + d], \quad \text{donde } ad - bc \neq 0.$$

[Indicación: Si  $c \neq 0$ , escribir

$$(af + b)/(cf + d) = (a/c) + (bc - ad)/[c(cf + d)], \text{ y aplicar d).]$$

5-8. Dadas cuatro funciones  $f_1, f_2, g_1, g_2$  que poseen derivadas en  $(a, b)$ . Definida  $F$  por medio del determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}, \quad \text{si } x \in (a, b).$$

a) Demostrar que  $F'(x)$  existe para todo  $x$  en  $(a, b)$  y que

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}.$$

b) Establecer y demostrar un resultado más general para determinantes de orden  $n$ .



**5-9.** Dadas  $n$  funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , admitiendo cada una derivada de orden  $n$  en  $(a, b)$ . Una función  $W$ , llamada *Wronskiano* de  $f_1, \dots, f_n$ , se define como sigue: Para cada  $x$  de  $(a, b)$ ,  $W(x)$  es el valor del determinante de orden  $n$  cuyo elemento perteneciente a la fila  $k$  y a la columna  $m$  es  $f_m^{(k-1)}(x)$ , donde  $k = 1, 2, \dots, n$  y  $m = 1, 2, \dots, n$ . [En lugar de los términos  $f_m^{(0)}(x)$  se escribe  $f_m(x)$ .]

a) Demostrar que  $W'(x)$  puede obtenerse reemplazando la última fila del determinante que define  $W(x)$  por las derivadas  $n$ -ésimas  $f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x), \dots, f_n^{(n)}(x)$ .

b) Suponiendo la existencia de  $n$  constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , no simultáneamente nulas, tales que  $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$  para todo  $x$  de  $(a, b)$ , demostrar que  $W(x) = 0$  para cada  $x$  en  $(a, b)$ .

NOTA. Un conjunto de funciones que satisfacen una tal relación se llama un *conjunto linealmente dependiente* en  $(a, b)$ .

c) La anulación del Wronskiano en todo el intervalo  $(a, b)$  es necesaria, pero no suficiente, para la dependencia lineal de  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Demostrar que en el caso de dos funciones, si el Wronskiano se anula en todo el intervalo  $(a, b)$  y una de ellas no se anula en  $(a, b)$ , entonces forman un conjunto linealmente dependiente en  $(a, b)$ .

**5-10.** Dada una función  $f$  definida en el intervalo  $(a, b)$ , con derivada finita en él y tal que  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = +\infty$ . Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow b-} f'(x)$  o no existe o es infinito.

**5-11.** Demostrar que la fórmula del Teorema del Valor Medio puede escribirse en la forma siguiente:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \quad \text{donde } 0 < \theta < 1.$$

Determinar  $\theta$  como una función de  $x$  y  $h$  cuando

- a)  $f(x) = x^2$ ,      b)  $f(x) = x^3$ ,  
c)  $f(x) = e^x$ ,      d)  $f(x) = \log x$ ,       $x > 0$ .

Mantener fijo  $x \neq 0$ , y calcular  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$  en cada caso.

**5-12.** En el Teorema 5-15 considerar  $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$  y  $g(x) = 4x^4 - 3x^2 - 2x$ . Demostrar que  $f'(x)/g'(x)$  nunca es igual al cociente  $[f(1) - f(0)]/[g(1) - g(0)]$  si  $0 < x \leq 1$ . ¿Cómo conciliar esto con la igualdad

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}, \quad a < x_1 < b,$$

que se obtiene del Teorema 5-15 cuando  $n = 1$ ?

**5-13.** En cada uno de los siguientes casos especiales del Teorema 5-15, considerar  $n = 1$ ,  $x_0 = a$ ,  $x = b$ , y demostrar que  $x_1 = (a + b)/2$ .

- a)  $f(x) = \sin x$ ,       $g(x) = \cos x$ ;      b)  $f(x) = e^x$ ,       $g(x) = e^{-x}$ .

¿Puede encontrarse una clase general de tales pares de funciones  $f$  y  $g$  para las que  $x_1$  valga siempre  $(a + b)/2$  de manera que los dos ejemplos a) y b) pertenezcan a dicha clase?

**5-14.** Dada una función  $f$  definida y con derivada  $f'$  finita en el intervalo semiabierto  $0 < x \leq 1$  y tal que  $|f'(x)| < 1$ . Definir  $a_n = f(1/n)$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , y demostrar que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . [Indicación: Utilizar la condición de Cauchy].

**5-15.** Suponiendo que  $f$  tiene derivada finita en cada punto del intervalo abierto  $(a, b)$  y que existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  y es finito en un punto interior  $x_0$ , demostrar que el valor de ese límite debe ser  $f'(x_0)$ .

**5-16.** Sea  $f$  una función continua en  $(a, b)$  con derivada finita  $f'$  en todo el intervalo  $(a, b)$ , excepto acaso en  $x_0$ . Si el  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  existe y vale  $A$ , demostrar que debe también existir  $f'(x_0)$  y que toma el valor  $A$ .

**5-17.** Sea  $f$  continua en  $[0, 1]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(x)$  finita para cada  $x$  de  $(0, 1)$ . Probar que si  $f'$  es función creciente en  $(0, 1)$ , también lo es la función  $g$  definida mediante la ecuación  $g(x) = f(x)/x$ .

**5-18.** Sea  $h$  un número positivo fijo. Demostrar que no existe función alguna  $f$  que satisfaga las tres condiciones siguientes:  $f'(x)$  existe para  $x \geq 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f'(x) \geq h$  para  $x > 0$ .

**5-19.** Suponiendo que  $f$  y  $g$  tienen derivadas continuas, utilizar el Teorema del Valor Medio para deducir la regla de la cadena de diferenciación de la función compuesta  $gf$ .

**5-20.** Si  $h > 0$  y  $f'(x)$  existe (y es finita) para todo  $x$  en  $(a-h, a+h)$ , y si  $f$  es continua en  $[a-h, a+h]$ , demostrar que se verifica:

$$a) \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h), \quad 0 < \theta < 1;$$

$$b) \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\lambda h) - f'(a-\lambda h), \quad 0 < \lambda < 1.$$

c) Si  $f''(a)$  existe, demostrar que

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

d) Dar un ejemplo en el que el límite del cociente que aparece en c) exista pero en cambio  $f''(a)$  no exista.

**5-21.** Sea  $f$  una función con derivada finita en  $(a, b)$  y supongamos que  $x_0 \in (a, b)$ . Consideremos la condición siguiente: Para todo  $\varepsilon > 0$  existe un entorno  $N(x_0; \delta)$ , cuyo radio  $\delta$  depende únicamente de  $\varepsilon$  y no de  $x_0$ , tal que si  $x \in N(x_0; \delta)$ , entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Demostrar que  $f'$  es continua en  $(a, b)$  si esta condición es válida en todo el intervalo  $(a, b)$ .

**5-22.** Demostrar el Teorema 5-13 si una de las derivadas  $f'_+(a)$ ,  $f'_-(b)$  es infinita o lo son ambas.

**5-23.** Dar un ejemplo de un par de funciones  $f$  y  $g$  que tengan derivadas finitas en  $(0, 1)$ , tales que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

pero en cambio que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)/g'(x)$  no exista, eligiendo  $g$  de tal manera que  $g'(x)$  no sea nunca cero.

5-24. Demostrar el siguiente teorema :

Dadas dos funciones  $f$  y  $g$  que poseen derivadas  $n$ -ésimas finitas en  $(a, b)$ . Supongamos que para algún punto interior  $x_1$  de  $(a, b)$ , ocurra que  $f(x_1) = f'(x_1) = \dots = f^{(n-1)}(x_1) = 0$  y que  $g(x_1) = g'(x_1) = \dots = g^{(n-1)}(x_1) = 0$ , pero que  $g^{(n)}(x_1)$  no se anule nunca en  $(a, b)$ . Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_1)}{g^{(n)}(x_1)}.$$

NOTA. Se supone que  $f^{(n)}$  y  $g^{(n)}$  no son continuas en  $x_1$ . [Indicación: Poner  $F(x) = f(x) - (x - x_1)^{n-1}f^{(n-1)}(x_1)/(n-1)!$ , definir  $G$  de manera parecida y aplicar el Teorema 5-15 a las funciones  $F$  y  $G$ .]

5-25. Demostrar que la fórmula del teorema de Taylor puede también escribirse del siguiente modo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{(x - x_0)(x - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_1),$$

donde  $x_1$  es interior al intervalo que une  $x$  con  $x_0$ . Sea  $1 - \theta = (x - x_1)/(x - x_0)$ . Demostrar que  $0 < \theta < 1$  y obtener la siguiente forma del resto (debida a Cauchy):

$$\frac{(1 - \theta)^{n-1}(x - x_0)^n}{(n-1)!} f^{(n)}[\theta x + (1 - \theta)x_0].$$

[Indicación: Tomar  $G(t) = g(t) - t$  en la demostración del Teorema 5-15.]